Alain CHAUVE, Inspecteur Pédagogique Régional de Philosophie
Cours interactif proposé aux partenaires du Projet *Europe, Éducation, École*
Diffusion en visioconférence le 21 mai 2015, 10h10 à 12h00 :
http://melies.ac-versailles.fr/projet-europe/visio/
http://www.coin-philo.net/eee.14-15.prog.php
Cours classés : http://www.coin-philo.net/eee.13-14.cours_philo_en_ligne.php
Vidéothèque : http://www.dailymotion.com/projeteee

DÉMONSTRATION ET VÉRITÉ

Dans le domaine de la connaissance, la notion de vérité peut avoir deux sens différents : Est vrai ce qui est *vérifié* ou bien est vrai ce qui est *démontré*.

Par exemple, lorsqu'on dit qu'il fait jour, s'il est vrai de dire *il fait jour* c'est parce qu'on peut le vérifier en constatant qu'il fait effectivement jour. Ce qu'on dit est alors en accord avec un fait, c'est-à-dire avec la réalité. Mais s'il est vrai de dire que la somme des angles d'un triangle est égale à deux angles droits, ce n'est pas parce qu'on peut le vérifier en mesurant les angles d'un triangle pour constater qu'il en est bien ainsi, mais c'est parce qu'on peut le démontrer géométriquement. Comme disait Aristote : « Même s'il était possible de percevoir que le triangle a ses angles égaux deux angles droits, nous en chercherions encore une démonstration. » (*Seconds Analytiques*, I, 31, 87b.35.)

I. Qu'est-ce qu'une démonstration ?

Démontrer c'est d'abord une certaine façon de *montrer*. Par exemple, dans une leçon d'anatomie, « faire une démonstration » veut dire que le professeur fait la dissection d'un corps pour faire voir où sont les organes et pour les décrire. Par exemple encore, lorsqu'une armée fait une « démonstration » devant l'ennemi, ce n'est pas pour livrer une bataille mais c'est pour montrer sa force ; elle fait une démonstration de force.

Mais quand on démontre, on montre *d'une certaine façon*. En effet il ne s'agit pas d'indiquer ou de désigner quelque chose comme lorsqu'on le montre du doigt pour le faire constater. Dans une démonstration, on montre quelque chose, mais on le montre de façon à apporter *la preuve* de quelque chose. Dans une démonstration, montrer c'est apporter une preuve ; montrer c'est prouver. Par exemple, quand on fait une démonstration de force, on montre sa force pour prouver qu'on est le plus fort. On veut intimider l'ennemi ; on veut lui faire mesurer les risques qu'il prend ; on veut lui faire apercevoir les conséquences qu'aurait une épreuve de force et on veut qu'il y réfléchisse et qu'il en tire les conclusions qui s'imposent. Par exemple encore, le professeur d'anatomie montre l'intérieur du corps pour donner l'explication des fonctions vitales, la respiration, la circulation du sang, la nutrition, la locomotion, etc. Il montre comment elles résultent de la « disposition des organes », comme dit Descartes dans le *Traité de l'Homme*, et qu'elles en sont la conséquence.

Ce qui vient alors au premier plan dans une démonstration, ce ne sont plus les choses et les faits que l'on constate et tels qu'on les constate, mais c'est l'explication et les raisons qu'on en donne ou qu'on peut en tirer. Ces raisons apparaissent lorsqu'on raisonne sur les faits et sur les choses en les reliant de manière à former des conséquences. Ainsi, quand on démontre, ce que l'on voit c'est moins les choses et les faits tels qu'on les constate que des conséquences, c'est-à-dire ce qu'on en déduit ou de quoi on peut les déduire. Démontrer c'est montrer les conséquences, et montrer une conséquence c'est faire une déduction. Pour démontrer quelque chose il faut le déduire. Une démonstration procède déductivement.

Doit-on alors considérer qu'une démonstration est la même chose qu'une déduction ?

II. La déduction

Dans une déduction, il y a au moins deux propositions dont l'une, la conclusion se tire de l'autre, la prémisse. Par exemple, de la prémisse *Tous les hommes sont injustes*, on tire la conclusion *Aucun homme n'est juste*. Toutefois nous prendrons comme exemple le fameux syllogisme – c'est-à-dire le raisonnement déductif – que l'on fait remonter à Aristote et qui est constitué de deux prémisses et une conclusion : *Tous les hommes sont mortels*, or *Socrate est un homme*, donc *Socrate est mortel*. Notons qu'il y a beaucoup d'autres formes de syllogismes et qu'il y a d'autres formes de déductions que les syllogismes. Par exemples, il y a le *modus ponens* : A implique B, or A, donc B.

Ce qu'il convient de remarquer est que toutes les formes de déductions doivent posséder une propriété sans laquelle le raisonnement ne serait plus une déduction : Il ne peut pas y avoir de déduction dans le cas où les prémisses seraient vraies et la conclusion fausse. Mais dans tous les autres cas il y a une déduction : Prémisses vraies et conclusion vraie ; prémisses fausses et conclusion vraie ; prémisses fausses et conclusion fausse. Par exemple, si je dis que *les hommes ont des ailes* et que les *oiseaux sont des hommes*, je peux et je dois en conclure que *les oiseaux ont des ailes* (prémisses fausses et conclusion vraie.) Si je dis que *les chiens sont des chats* et que *les souris sont des chiens*, je peux et je dois en conclure que *les souris sont des chats* (prémisses fausses et conclusion fausse).

Comment se fait-il que de telles déductions soient possibles et correctes ? Pour expliquer ceci il faut d'abord comprendre que lorsqu'on parle d'une déduction, la notion de vérité prend un sens nouveau. Une déduction en effet est un raisonnement qui permet de tirer une conclusion de prémisses mais qui ne prétend pas prouver la vérité de la conclusion. Il montre seulement que si on pose telles prémisses on devra nécessairement poser telle conclusion. On pourrait dire qu'une déduction montre qu'il est vrai qu'on peut conclure, mais qu'elle ne montre pas que ce que l'on conclut est vrai. On distinguera donc la *vérité* des propositions que l'on déduit et la *validité* de la déduction. Qu'est-ce qui rend valide une déduction ? C'est sa forme. En effet, une déduction fait abstraction du contenu des propositions, c'est-à-dire de ce dont elles parlent, pour ne considérer que la façon dont s'enchaînent les propositions.

Par exemple, si l'on dit que les hommes sont mortels et que Socrate est un homme, on peut être sûr de pouvoir affirmer qu'il est mortel sans avoir besoin de le vérifier en le mettant à mort pour s'en assurer. Cette certitude est indépendante de l'accord des propositions avec la réalité, c'est-à-dire de leur vérité au sens banal. Quand bien même les hommes seraient immortels et quand bien même Socrate n'aurait jamais existé, la déduction serait valide. Aussi parle-t-on de la « vérité formelle » du raisonnement déductif, c'est-à-dire d'une vérité qui consiste dans l'accord des propositions avec la forme logique de la déduction et non pas d'une vérité qui consiste dans l'accord des propositions avec la réalité.

Mais d'où vient que cette forme a le pouvoir de rendre valide une déduction ? Comment, par sa forme, une déduction a-t-elle le pouvoir de déduire que *Socrate est mortel* des propositions *les hommes sont mortels* et *Socrate est un homme* ? Évidemment cela vient des relations logiques qu'elle exprime : Une classe H est incluse dans une classe M ; un individu S appartient à la classe H, donc il appartient à la classe M. Et cela vaut quelles que soient les classes et quels que soient les individus qui leur appartiennent. Dans une déduction on ne considère que les propriétés logiques qu'elle exprime – et non ce dont elle parle – propriétés qui font que si l'on pose les prémisses, on devra nécessairement poser la conclusion en vertu de la forme, non du contenu.

Il y a donc deux sens de la notion de vérité : La notion de vérité au sens d'accord avec la réalité et la notion de vérité au sens de conformité avec la forme logique. On peut relier ces deux sens en observant que dans une déduction la façon dont s'enchaînent les propositions fait que dans le cas où les prémisses seraient vraies on ne pourrait pas tirer une conclusion fausse. Cela se comprend lorsqu'on considère qu'une déduction est toujours un raisonnement « hypothétique ». On doit dire : *Si les hommes étaient mortels* et *si Socrate était un homme*, alors *Socrate serait mortel*. On voit dès lors très bien qu'une déduction de cette forme est valide et le serait encore avec des prémisses fausses : *Si les dieux étaient mortels* et *si Socrate était un dieu*, *Socrate serait mortel*. Et même si les trois propositions étaient fausses, la déduction serait encore valide : *Si les dieux étaient des martiens* et *si Socrate était un dieu*, *Socrate serait un martien*. En revanche, il est logiquement impossible de construire un syllogisme qui aurait une forme logique valide avec des prémisses qui seraient vraies et une conclusion qui serait fausse.

Retenons ces deux idées : 1) La forme de la déduction ne permet pas d'avoir des prémisses qui seraient vraies et une conclusion qui serait fausse. Si les prémisses sont considérées comme vraies et si la forme de la déduction est respectée, la conclusion sera nécessairement considérée comme vraie. 2) Une déduction est un raisonnement valide par sa forme logique, mais c'est un raisonnement qui reste « hypothético-déductif ». Il nous assure que l'on raisonne juste, mais il ne nous assure pas que l'on raisonne sur des choses qui sont vraies. Il faut distinguer la vérité des choses sur lesquelles on raisonne et la *validité* du raisonnement qu'on fait sur ces choses.

III. La distinction entre démonstration et déduction

Dans une démonstration on ne veut pas seulement raisonner juste, mais on veut aussi ne raisonner que sur des choses vraies. On ne veut faire des déductions qu'à partir de prémisses incontestablement vraies de sorte qu'on sera assuré que ce qu'on en déduit est nécessairement vrai.

La démonstration se caractérise alors par deux choses :
Toute démonstration est une déduction, mais toute déduction n'est pas une démonstration.
Tout ce qui est démontrable est vrai.

Les deux textes d'Aristote vont permettre de mettre en évidence ce qu'impliquent ces deux propriétés de la démonstration.

Dans le premier texte, Aristote donne d'abord la définition générale du syllogisme : Un raisonnement constitué de prémisses d'où résulte une conclusion. Il distingue ensuite deux sortes de syllogismes : Le syllogisme démonstratif et le syllogisme dialectique. Il explique enfin ce qui les distingue : L'un part de prémisses vraies ; l'autre part de prémisses probables.

La définition générale d'un syllogisme est celle d'un raisonnement déductif. Celui-ci est un « discours » parce qu'il est composé de propositions qui affirment ou nient quelque chose. Deux sortes de propositions composent ce discours. Il y a les prémisses, c'est-à-dire des propositions que l'on pose et qui peuvent être vraies ou fausses, et il y a la conclusion, c'est-à-dire une proposition qui résulte nécessairement des prémisses. « Nécessairement », dit Aristote, parce qu'elle résulte de ce que l'on a posé et de cela <u>seul</u>, sans considérations extérieures et sans invoquer autre chose que ce que l'on a posé. C'est donc un lien interne au discours qui fait le raisonnement, ce ne sont pas des choses ou des idées dont le discours ne fait pas état et qui viendraient de ce que l'on sait ou de ce que l'on a vu par ailleurs.

Le syllogisme démonstratif ou, comme Aristote l'appelle parfois, le « syllogisme scientifique », est celui qui donne un vrai savoir. Le syllogisme dialectique tire son nom de l'art de « la dialectique » qui est l'art de discuter et d'argumenter pour débattre d'une opinion. Ce qui fait la différence entre ces deux sortes de syllogismes est que dans la démonstration les prémisses sont *vraies et premières* alors que dans une simple argumentation où l'on discute d'une opinion, les prémisses ne sont que *probables*.

Cela signifie que dans une démonstration les prémisses sont vraies dans un sens fort du mot, alors que dans une argumentation, elles ne sont vraies qu'en un sens faible du mot. Au sens fort, les prémisses sont des *vérités premières*, des « principes », dit Aristote, c'est-à-dire des propositions qui ne dépendent pas d'autres propositions et dont la vérité ne dépend pas d'autre chose, pas même de ce qu'on aurait pu voir et constater. Tout au plus une prémisse d'une démonstration pourrait résulter d'une autre démonstration qui n'a pu se faire qu'à partir de vérités premières.

Que peuvent être ces vérités premières ? Elles se distinguent de simples opinions qui ne sont que *probables*, c'est-à-dire qui ne sont pas prouvées mais qui sont seulement reçues sans qu'on puisse être sûr qu'elles sont vraies. Leur vérité se mesure à des degrés de probabilité que celui qui a cette opinion ne fait pas erreur selon qu'elle est plus ou moins répandue. Si tous les hommes ont cette opinion ou si elle est partagée par la majorité, si seuls les « sages » (ceux qui savent, les spécialistes ou les experts), tous ou la majorité ou ceux qui font autorité professent cette opinion, elle sera plus ou moins probable. Par opposition à des opinions qui ne sont que probables, les vérités premières d'une démonstration sont des vérités *certaines*, c'est-à-dire des vérités dont on ne peut pas douter. On ne peut démontrer quelque chose qu'en faisant appel à des vérités certaines. Pourquoi faut-il des certitudes pour faire une démonstration ?

Le deuxième texte d'Aristote apporte une précision sur ce que des vérités premières et certaines apportent à une déduction pour qu'elle ait valeur de démonstration.

Aristote rappelle d'abord que dans un syllogisme, on raisonne sur des propositions qui sont vraies ou fausses et qu'on peut raisonner avec des prémisses fausses ou avec des prémisses vraies. La conclusion sera alors, en vertu de la forme déductive, nécessairement vraie ou nécessairement fausse. Il rappelle aussi que « de prémisses vraies on ne peut tirer une conclusion fausse, mais [que] de prémisses fausses on peut tirer une conclusion vraie ». Il fait alors observer ceci : Dans le cas de prémisses fausses avec une conclusion vraie, la déduction sera valide, « mais elle ne portera pas sur le *pourquoi* mais sur le fait ». Autrement dit, la déduction ne donnera pas une *explication*. Reprenons l'exemple d'un tel syllogisme : *Si les dieux sont mortels* et si *Socrate est un dieu*, alors *Socrate est mortel*. Il se trouve que la conclusion est vraie, mais si elle est vraie ce n'est pas en raison des prémisses, c'est seulement parce que ce qu'elle dit est en accord avec un fait. Dans un tel syllogisme on tire une conclusion qui est vraie parce que ce qu'elle dit est en accord avec un fait, mais ce syllogisme ne nous donne pas l'explication de ce fait. Et il ne peut pas nous la donner puisque l'explication devrait être dans les prémisses. Or ces prémisses sont fausses !

IV. Démonstration et argumentation

La démonstration et l'argumentation font appel à toutes les formes valides de raisonnements. Ce qui les distingue est que la démonstration est fondée sur des *vérités premières* et qu'elle donne *une explication* alors que l'argumentation repose sur des *opinions* ou n'invoque que des *faits* sans donner une explication. Il y a ainsi deux sortes d'argumentations. Il y a celles qui reposent sur des faits que l'on peut observer et constater mais qui n'en donnent aucune explication. Il y a celles qui reposent sur des opinions qui sont plus ou moins probables mais qui restent des suppositions dont on n'est pas sûr qu'elles donnent une véritable explication.

Considérons d'abord l'exemple d'une argumentation qui repose sur des faits :

Il n'y a pas de fumée sans feu,
or il y a de la fumée dans la maison,
donc il y a le feu dans la maison.

C'est une argumentation qui respecte la forme logique d'une déduction. Elle est valide. Les propositions sont vraies et celui qui tient ce raisonnement a raison. Et pourtant ce n'est qu'une argumentation et non une démonstration. En effet, si je raisonne ainsi, je raisonne en suivant l'ordre dans lequel les choses m'apparaissent : c'est la fumée que je vois qui me fait dire qu'il y a un feu, et je le dis aussi bien de façon générale (il n'y a pas de fumée sans feu) que dans le cas particulier de la maison (il y a de la fumée dans la maison). Mon raisonnement repose sur des faits, c'est-à-dire sur ce que je vois et ce que j'ai déjà vu, au lieu de donner l'explication de ce que je vois et de ce qui se passe, c'est-à-dire *la cause*. Car ce n'est pas parce qu'il y a de la fumée qu'il y a un feu, c'est parce qu'il y a un feu qu'il y a de la fumée. Pour que le raisonnement soit démonstratif, il faudrait qu'il suive *l'ordre dans lequel les choses se produisent et* non pas *l'ordre dans lequel elles m'apparaissent* :

Quand il y a un feu, il y a de la fumée,
or il y a un feu dans la maison,
donc il y a de la fumée dans la maison.

À l'ordre subjectif d'une argumentation qui repose sur des faits, on substitue l'ordre objectif dans lequel les choses se passent et où les faits reçoivent leur explication. Cette fois-ci, en effet, dans mon raisonnement les choses s'enchaînent dans l'ordre réel, causal, et on a une explication du fait qu'il y a de la fumée dans la maison. La fumée n'était que *l'indice*, le signe qu'il y avait le feu dans la maison, mais elle ne pouvait pas être *la cause* de ce qui arrive, c'est-à-dire des faits.

Retenons que raisonner juste et avoir raison ne signifie pas que l'on a démontré quelque chose. Pour démontrer quelque chose, il faut l'expliquer par un raisonnement qui exprime la cause. Une argumentation ne peut le faire parce qu'elle raisonne à partir de faits et sur des faits sans raisonner à partir d'une cause qui explique les faits.

Considérons maintenant un exemple d'une argumentation qui repose sur une opinion plus ou moins probable.

Depuis l'Antiquité jusqu'à Copernic (1543), l'opinion de tous les astronomes et, en particulier, du plus illustre qui faisait autorité, Ptolémée (vers 140), la Terre était immobile au centre de l'univers, c'est-à-dire d'une immense sphère céleste, et les étoiles, les planètes, la Lune et le Soleil tournaient autour de la Terre.

Que vaut alors le raisonnement suivant ? :

Les astres qui tournent autour de la Terre se lèvent et se couchent,
or le Soleil tourne autour de la Terre,
donc le Soleil se lève et se couche.

Nous avons bien là un raisonnement valide dans lequel on veut donner l'explication d'un fait observé, les levers et les couchers du Soleil, en donnant la cause de ce fait, à savoir la rotation du Soleil autour de la Terre. Mais cette cause n'est qu'une opinion et cette opinion, bien que partagée pendant 14 siècles par les astronomes, reste une supposition et, à ce titre, ne peut pas être posée comme une vérité première, un principe, qui fait l'objet d'une certitude et qui permettrait d'expliquer les levers et les couchers du Soleil. Au contraire, le principe de la mécanique – la relativité (galiléenne) du mouvement observé – interdit de faire de cette opinion une certitude. On ne peut pas distinguer si c'est le corps observé qui tourne autour de nous ou si c'est nous, les observateurs, qui tournons autour de lui. On a donc donné une explication qui n'est que probable et qui reste une supposition qui peut être fausse. Ce n'est pas une certitude et l'on ne peut donc pas considérer que c'est vraiment une explication.

On retiendra alors que la notion de vérité a trois significations :

Est vrai ce qui est en accord avec la réalité. Ce qu'on dit est alors « exact », c'est-à-dire vérifié.

Est vrai ce qui est conforme à une forme logique de raisonnement. Ce qu'on dit est alors « valide », c'est-à-dire correctement déduit.

Est vrai ce dont on ne peut pas présumer que c'est faux. Ce qu'on dit est alors « certain ».

Faire une démonstration consiste à faire un raisonnement valide avec des vérités certaines. Ce que l'on démontre est alors « prouvé », c'est-à-dire certain parce que déduit par un raisonnement valide de vérités premières certaines.

V. La notion de vérité certaine

Dans une démonstration on ne raisonne pas sur les mêmes choses que dans une argumentation et le raisonnement n'a pas le même sens. En effet, dans une argumentation on avance une opinion qu'on essaye de confirmer et de faire admettre en accumulant des faits et des témoignages. Mais dans une démonstration, il ne s'agit pas de confirmer ou d'infirmer une opinion. Dans une démonstration, le mot « vrai » prend un sens qui dépasse le sens banal de la vérité. Au sens banal, parler de vérité c'est dire que l'on a raison, que c'est confirmé et vérifié. À ce titre nous disons souvent des choses qui sont vraies mais qui ne se prêtent à aucune démonstration. Si, par exemple, il fait chaud et que je dis « il fait chaud », j'ai raison et ce que je dis est exact, et pourtant cette vérité n'a sa place ni dans une démonstration ni dans un savoir démonstratif. Elle ne se démontre pas ; elle se vérifie seulement. En revanche, ce qui est démontrable est quelque chose qui est vrai qu'on puisse constater ou non qu'il en est bien ainsi. C'est quelque chose que l'on n'a pas à confirmer ou à vérifier pour le faire admettre. Avec la démonstration, la vérité est indépendante de celui qui la dit, qui l'admet ou qui la reconnaît. C'est avec des vérités qui valent en droit et par elles-mêmes que l'on fait des démonstrations.

En revanche, que peut-on faire de vérités banales qu'on énonce en désordre : « il fait beau », « le jour se lève », « j'ai rencontré un ami », etc. ? Un savoir démonstratif écarte d'un coup ces vérités qui n'entrent dans aucune démonstration et qu'il s'agit seulement de vérifier en apportant des arguments pour en convaincre les autres. Or il n'y a pas à argumenter quand il s'agit de démontrer parce que démontrer c'est faire appel à des vérités qui ne doivent rien à des arguments qui devraient nous convaincre ou à des vérifications qui devraient venir confirmer que les choses sont bien comme on le dit. Quels que soient les arguments qu'on donne ou les vérifications que l'on apporte, la somme des angles d'un triangle est égale à deux angles droits ; « Tout corps qui se meut tend à continuer son mouvement en ligne droite » (Descartes, *Principes I, § 39*) ; « La même force qui peut lever un poids de 100 livres à la hauteur de deux pieds, en peut aussi lever un de 200 livres à la hauteur d'un pied » (Descartes à Huygens, 5 octobre 1637) ; « Les liqueurs pèsent suivant leur hauteur » (Pascal, *Traité de l'Équilibre des liqueurs*, 1663). Ces vérités tiennent à la nature du triangle, à celle du mouvement et à celle de la force, d'un poids ou de la pression d'un liquide. Elles ne sont pas un sujet de débat pour celui qui fait de la géométrie ou de la mécanique. Il peut y avoir des discussions sur le bien fondé d'une opinion, il ne peut pas y en avoir sur les droites, les angles, les figures géométriques, les forces et les mouvements. Trouver les propriétés géométriques d'une figure ne consiste pas à trouver et à rassembler des arguments qui vont convaincre qu'elle a ces propriétés. Personne n'ira imaginer qu'un géomètre, par exemple, aurait d'abord l'opinion que la somme des angles d'un triangle est égale à deux angles droits, et qu'ensuite il irait chercher des arguments pour en convaincre les autres. Son but n'est pas de convaincre de cette opinion mais de démontrer que c'est une propriété du triangle. Cette propriété se démontre non pas par un débat et une controverse autour d'une table ronde où l'on échange des arguments et où l'on vote pour donner raison à celui qui se sera montré le plus convaincant. Cette démonstration ne montre pas que c'est convaincant, elle montre que c'est une propriété qui appartient à la nature du triangle.

On peut dire que dans le domaine du savoir, une vérité n'est telle que par sa raison ; elle a sa raison qui est une raison en soi et non pas une raison d'y croire ou de l'admettre ; elle a sa raison qui est une raison objective, indépendante de la manière subjective qu'a tel ou tel individu d'en prendre connaissance et de se déclarer convaincu. La démonstration est l'explication objective de la chose et non pas la manière pédagogiquement convaincante de la présenter à ceux qui attendent d'en être convaincus.

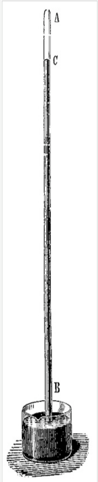
VI. D'où les vérités premières tirent-elles leur certitude ?

Descartes donne une réponse : « Ceux qui cherchent le droit chemin de la vérité ne doivent s'occuper d'autre objet dont ils ne puissent avoir une certitude égale à celle des démonstrations de l'arithmétique et de la géométrie » (*Règle II*). Que veut-t-il dire ? Il veut dire que la validité, la rigueur logique d'un raisonnement, ne suffit pas à faire de ce raisonnement une démonstration. Il veut dire que sa valeur démonstrative tient à ce que nous sommes capables d'avoir des certitudes qui rendent possibles « ces longues chaînes de raisons […] dont les géomètres ont coutume de se servir pour parvenir à leurs plus difficiles démonstrations » (*Discours de la méthode, 2ème Partie*.)

Cette certitude vient de ce que nous sommes capables d'apercevoir « clairement et distinctement » des vérités au sujet des choses sur lesquelles on raisonne. Ce sont les mathématiques qui nous en donnent l'exemple. Les raisonnements des géomètres portent sur des objets – points, droites, plans, angles, figures – qui sont très différents des choses concrètes qu'on peut voir et toucher. On ne peut que les concevoir, non les voir. Nul n'a jamais vu ni ne verra jamais un point, une droite prolongée à l'infini, un mouvement rectiligne uniforme qui va à l'infini (c'est le principe fondamental de la mécanique, le principe d'inertie). Les objets du géomètre sont des choses qu'il conçoit « clairement et distinctement ». Cette expression veut dire qu'il suffit de les concevoir pour être sûr que l'on a aperçu une vérité. Par exemple, que « deux et trois joints ensemble produisent le nombre de cinq » (*3ème Méditation*). Ces choses, « je ne me saurais empêcher de les estimer vraies pendant que je les conçois clairement et distinctement », c'est-à-dire qu'il suffit d'y penser pour être sûr que c'est vrai. Raisonner en se rapportant à des vérités qu'on a aperçues sur ces choses c'est démontrer ce que l'on en déduit.

Descartes ajoute que cela ne concerne pas seulement la possibilité de faire des mathématiques mais que c'est aussi « la connaissance que les hommes peuvent avoir de la nature » qui est fondée sur notre pouvoir d'apercevoir quelque chose clairement et distinctement. Toute notre connaissance de la nature est une connaissance démonstrative tirée « des principes de la géométrie et des mécaniques », et « de cela seul ».

Cela signifie que la connaissance sûre et vraie est dans ce qui peut être démontré et non pas dans ce qui n'est qu'observé et constaté. Elle suppose qu'on raisonne à partir de principes, c'est-à-dire de ce que l'on doit nécessairement concevoir pour expliquer un fait ou un phénomène. Un physicien, par exemple, raisonne en termes de poids, de masse, de force, de mouvement, vitesse, direction et trajectoire, etc. C'est pourquoi il peut établir démonstrativement des lois physiques. C'est, par exemple, le cas de Torricelli, un disciple de Galilée, qui réalise en 1643 la fameuse expérience avec laquelle on démontre la pression atmosphérique.



Baromètre à mercure de Torricelli.

Il voit et constate que dans un tube renversé sur un bac de mercure, une colonne de mercure se stabilise à une hauteur de 76 cm environ.

Le phénomène fait l'objet d'un raisonnement démonstratif lorsque Torricelli introduit dans ce qu'il constate quelque chose qu'il ne voit pas et qui ne se constate pas, à savoir la considération de choses invisibles avec lesquelles on peut raisonner sur le phénomène. Ces choses sont des notions claires et distinctes, des concepts : le poids et l'équilibre entre des poids. Il conçoit qu'il y a dans ce qu'il voit un poids, celui de l'air, et un poids qu'il équilibre, celui de la colonne de mercure. On explique le fait que l'on constate en raisonnant en termes de poids et d'équilibre. On a du même coup l'explication du fait qu'il est impossible de faire monter l'eau d'un puits avec une pompe à une hauteur de plus de 10m 33.

Pour raisonner démonstrativement, il faut raisonner d'après des vérités certaines, c'est-à-dire qui s'imposent à notre esprit lorsqu'il nous montre évidemment qu'une chose est vraie, par exemple, que 2 et 2 sont 4, Sganarelle ! La certitude de ces vérités tient à leur évidence intellectuelle. Et cela même fait l'objet d'une certitude. C'est ce que Descartes exprime en faisant référence à Dieu : Nous avons la certitude que les notions claires et distinctes de géométrie et de mécanique sont certaines parce que nous pouvons avoir la certitude que Dieu nous a faits capables d'apercevoir clairement et distinctement de telles vérités et, ainsi, de « nous assurer du vrai ».

VII. Démonstration et système.

Descartes n'a qu'à moitié raison. Il a raison en ce sens que pour démontrer quelque chose il faut être en mesure de faire appel à ce qui peut être aperçu clairement et distinctement, c'est-à-dire à ce qui est conçu et qui peut servir de principe à une démonstration parce que c'est ce qui permet de rendre raison de ce que l'on constate. S'il ne s'agissait en effet que de vérifier ce que l'on constate, nous n'aurions que des vérités qui relèveraient non pas d'une démonstration mais d'une simple constatation. On accumulerait et on juxtaposerait des vérités disparates, des vérités pour lesquelles la seule question serait de savoir si elles sont vérifiées ou vérifiables : « il fait jour » ; « la flamme est brûlante ». L'expérience peut ainsi m'apprendre des vérités empiriques, des vérités de fait, mais de telles vérités réduites à une constatation ne peuvent pas entrer dans une suite de vérités enchaînées déductivement. Pour être démontrables, des vérités doivent faire partie d'un système.

Descartes n'a alors raison qu'à moitié. Si le seul fondement de la démonstration est l'idée claire et distincte et qu'il suffit d'apercevoir clairement et distinctement quelque chose pour être assuré que c'est vrai, alors, pour démontrer quelque chose, la seule règle serait de se ramener à des évidences et de s'en tenir à des évidences. Telle est la « méthode » de Descartes dont le principe est qu'il y a vérité lorsqu'il y a certitude et que nous sommes certains de quelque chose d'abord par l'évidence que nous devons à une idée claire et distincte. C'est la 1ère règle qui pose que ce qui est évident est vrai. Les trois règles suivantes nous disent de ramener à des évidences tout ce que nous cherchons à connaître. Pour cela, il faut « tout examiner avec ordre » (*Règle VIII*), l'ordre qu'il faut pour suivre des évidences et s'en tenir à des évidences. Ainsi, « je m'assure de la vérité ».

Or, il ne suffit pas de se rapporter et de s'en tenir à des évidences que l'on doit à « une perception claire et distincte » de ce sur quoi on raisonne. On veut davantage ; on veut des vérités qui sont non seulement certaines mais qui sont aussi des raisons dont on tire d'autres vérités ; on veut, en un mot, que des vérités s'en déduisent. Pourquoi veut-on faire des déductions au lieu de s'en tenir aux vérités que l'on aperçoit sur les objets géométriques, par exemple ? Parce qu'un géomètre n'est pas satisfait de vérités que l'on se contente d'apercevoir sur des figures au cas par cas. Le géomètre veut que les vérités géométriques soient obtenues à partir de lois géométriques et qu'elles résultent de principes géométriques, c'est-à-dire de raisons premières et fondamentales d'où elles se tirent déductivement. En un mot, il veut que les vérités géométriques forment un système. Démontrer, c'est prouver une vérité dans un système de propositions vraies.

C'est ce que veut exprimer le texte de Spinoza. Il semble d'abord dire la même chose que Descartes : une connaissance vraie est fondée sur « des choses connues avec certitude » à l'exemple de ce que font « les géomètres » quand ils démontrent des théorèmes. Mais cette méthode n'est plus celle de Descartes qui nous fait seulement progresser d'évidences en évidences. La méthode dont parle Spinoza est celle d'Euclide.

Dans le système d'Euclide (vers 300 avant J.-C.), des propositions géométriques – des théorèmes – se rattachent à des principes dont elles se déduisent. Il y a trois sortes de principes : les définitions, les axiomes et les postulats. Les *définitions* sont celles d'objets géométriques élémentaires (point, droite, plan, etc.) Les *axiomes* formulent les règles de raisonnement sur des grandeurs (longueurs, aires, angles), leur égalité ou leur inégalité (par exemple, deux grandeurs égales à une même troisième sont égales entre elles ; le tout est plus grand que la partie). Et enfin il y a 6 *postulats* qui sont des règles de construction de figures dans l'espace. Euclide « demande » qu'entre deux points on puisse tracer une droite ; qu'on puisse prolonger indéfiniment une droite ; qu'on puisse décrire un cercle en prenant un point pour centre et un segment de droite comme rayon. Remarquons que le système d'Euclide distingue bien, d'un côté, les *raisonnements* que l'on tient et dont les règles sont formulées par les axiomes, et, d'un autre côté, les *choses* sur lesquelles on raisonne, c'est-à-dire les figures géométriques que l'on doit construire dans l'espace avec des éléments géométriques (point, droite, plan) qui font l'objet de définitions et selon des règles de construction formulées par les postulats. Ces règles n'admettent que des constructions dont on peut concevoir qu'elles sont effectuables à la règle et au compas. Dans le système euclidien, la démonstration consiste à mettre en évidence les propriétés des figures géométriques non pas en les montrant sur la figure, mais en construisant cette figure pour raisonner sur sa construction en établissant des égalités entre les grandeurs qui la constituent.

Il y a toutefois une difficulté. Si l'on ne regarde que l'ordre déductif d'un système, on voit des propositions qui se succèdent, qui dépendent les unes des autres et qui sont comme suspendues à des principes d'où elles se déduisent. Cet ordre déductif impose qu'une proposition soit démontrée à partir et au nom des propositions qui la précèdent et d'elles seules sans faire appel à des vérifications, des constatations ou des représentations extérieures au système. Les vérités qu'on démontre ne viennent de nulle part ailleurs que du système lui-même : « leur preuve ne peut venir que de principes internes. » (Leibniz, *Préface des Nouveaux Essais*.)

VIII. Démonstration et Intuition.

Les principes d'où l'on déduit les vérités qui en dépendent sont des vérités premières qui ne sont pas démontrées à partir d'autres ni ne sont tirées de considérations extérieures au système. Ce ne sont pas des vérités empiriques tirées de ce qu'on peut voir et toucher. Mais alors, les vérités à partir desquelles et avec lesquelles on peut faire des démonstrations ne sont pas elles-mêmes démontrables. Aristote l'avait fait observer : « Ou bien les principes seront démontrables ainsi que les principes de principes, et ainsi de suite à l'infini, ou bien les vérités premières seront des définitions indémontrables. » (*Seconds Analytiques, I, 3.*) Tout ce qui est démontrable est vrai, mais tout ce qui est vrai n'est pas démontrable. On ne démontre pas qu'il y a des points et des droites, qu'on peut tracer une droite entre deux points, que le tout est plus grand que la partie. On en est pourtant certain, et sans ces certitudes premières une démonstration ne serait pas possible. Ces principes ne sont pas de simples suppositions qu'il faudrait vérifier ou confirmer. Ce sont des suppositions, si l'on veut, mais des suppositions qu'il faut nécessairement faire pour démontrer quelque chose. Ce ne sont pas de simples conventions qu'on se contenterait d'admettre sans y voir des vérités. Il faut donc reconnaître qu'il s'agit de vérités premières qui font l'objet d'une « intuition » : « C'est une intuition qui appréhendera les principes. » (Aristote, *Seconds Analytiques, II, 19*.) Un savoir démonstratif présuppose la représentation abstraite d'objets idéaux, tels que les points et les droites du géomètre ou les nombres de l'arithmétique ; il présuppose que c'est sur eux et avec eux que l'on peut raisonner démonstrativement. La certitude que donnent les démonstrations géométriques, par exemple, vient de ce que les géomètres « supposent un espace indéfiniment étendu en longueur, largeur et hauteur ou profondeur, divisible en diverses parties qui pouvaient avoir diverses figures et grandeurs. » (Descartes, *Discours de la méthode, 4ème Partie*.)

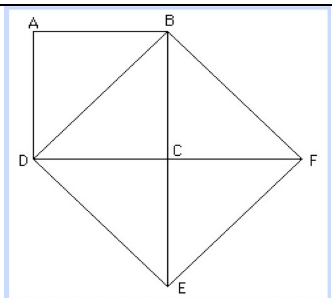
Schopenhauer en tire une conséquence radicale. Les démonstrations sont fondées sur une intuition et c'est de cette intuition qu'elles tirent leur certitude et non pas de déductions ou de raisonnements. La certitude que nous donne une démonstration ne vient pas de raisonnements qu'on tient mais d'une « évidence originelle », comme il dit, qui est une intuition : « L'intuition est la source première de toute évidence. » (*Le Monde*… § 15.)

Que faut-il entendre par « intuition » ? Philosophiquement, on distingue deux significations du mot : 1), l'intuition est une représentation immédiate que nous donnent nos sens. Par exemple, je vois cet arbre. Cette perception ne vient pas d'un raisonnement ni même d'un concept, mais elle vient tout simplement de ce qu'il y a dans mon champ de vision. On parle alors d'une intuition *sensible* ou d'une intuition *empirique*. Le mot intuition s'oppose alors à concept et à raisonnement. 2), en un second sens, l'intuition est une représentation immédiate que nous donne notre entendement lorsque nous comprenons une signification sans avoir besoin d'une explication. Par exemple, quand on parle de points, de droites, de nombres, etc. ce sont là des « choses claires et entendues de tous les hommes » et « évidentes d'elles-mêmes », (Pascal, *De l'Esprit géométrique*), c'est-à-dire que ce sont des choses dont nous avons immédiatement l'idée. De plus, cette compréhension immédiate est celles de « choses [qui] peuvent servir d'objets à des pensées véritables ». Ce ne sont pas seulement des notions « claires et distinctes », ce sont aussi des objets sur lesquels on aperçoit des vérités. De tels objets n'ont plus rien d'empirique. C'est pourquoi on parle à leur sujet d'une intuition *pure*. Par exemple, l'étendue géométrique fait l'objet d'une perception claire et distincte qui est pure en ce sens que ce n'est pas la représentation d'une chose concrète qu'on peut voir (une immense plaine, le ciel immense et profond peuplé d'étoiles, etc.) C'est une pure étendue sans contenu empirique.

C'est à cette intuition pure de l'espace que Schopenhauer fait appel à propos de la géométrie. Dans cette intuition pure, nous avons immédiatement la représentation de points, de droites, de plans, et nous apercevons immédiatement les possibilités de construire des figures. Nous n'avons pas besoin d'un postulat pour nous dire et nous assurer qu'entre deux points nous avons la possibilité de tracer une droite. La vraie méthode géométrique ne consiste pas à se servir de l'appareil démonstratif d'Euclide pour établir un théorème, mais à construire dans l'espace la figure qui lui correspond de manière à ce qu'à sa vue s'impose à l'esprit ce qui a « un caractère de nécessité ». Bien entendu, « à la vue » ne signifie pas en écarquillant les yeux pour voir un théorème ! Il s'agit de ce qui est « perceptible » dans « l'intuition pure de l'espace » et non pas dans les tracés du dessin d'une figure géométrique. Avec cette intuition pure s'impose à l'esprit la « nécessité intuitive » de ce que nous pouvons nous représenter dans l'espace : des triangles, des parallélogrammes, des perpendiculaires, des cercles, etc. Cette nécessité ne vient pas de démonstrations, mais c'est elle qui, au contraire, rend possibles des démonstrations. Elle vient de la représentation préalable – *a priori* – de l'étendue géométrique qui s'impose à l'esprit.

Mais Schopenhauer ne semble pas se rendre compte que les vérités premières telles qu'elles nous sont livrées dans « l'évidence intuitive » de la représentation géométrique de l'espace, avec ses points, ses droites et ses figures, ne suffit pas. Ces vérités restent enfermées en quelque sorte dans leur évidence. Il faut au contraire expliciter, dévoiler les règles générales qui se cachent sous ces évidences et auxquelles obéissent la construction de figures et les raisonnements que l'on tient sur les grandeurs que l'on construit. Par exemple, les postulats sont justement les règles qui explicitent les possibilités de construction de figures et qui nous autorisent à nous représenter des points, des droites, des perpendiculaires, des parallèles avec lesquels nous construisons des triangles, des carrés, des cercles.

Autrement dit, l'appareil démonstratif du système euclidien dévoile la *structure* de l'espace qui fait l'objet d'une représentation intuitive. Les principes – les « axiomes », comme on dit de nos jours – sont la définition même d'un espace géométrique en ce sens qu'ils fixent les procédures de démonstration et délimitent ainsi le domaine de ce qui pourra être démontré.

	Par exemple, dans la géométrie d'Euclide, l'espace est celui de constructions effectuables à la règle et au compas, comme la duplication du carré : on peut démontrer, en raisonnant sur une figure, que pour obtenir un carré d'une surface qui est le double de celle d'un carré donné, il faut construire un carré qui a pour côté la diagonale du carré donné.

Mais cette géométrie est impuissante devant des problèmes comme celui de la duplication du cube – construire un cube qui a un volume double de celui d'un cube donné – ou comme le fameux problème de la quadrature du cercle – construire un carré dont la surface est égale à celle d'un cercle. On ne peut effectuer de telles constructions dans l'espace euclidien qui n'autorise que les constructions que l'on peut effectuer à la règle et au compas. Pour traiter ces problèmes, il faut renoncer à raisonner sur des constructions de figures dans l'espace et il faut introduire en géométrie d'autres « méthodes » telles que, par exemple, des procédures de démonstration par l'algèbre.

Conclusion

Trois points sont à retenir.

1. La *déduction* est un raisonnement qui tient sa validité de sa forme logique mais qui peut porter indifféremment sur ce qui est vrai ou sur ce qui est faux. La déduction n'est pas valide dans le cas où les prémisses seraient vraies et la conclusion fausse.

La *démonstration* consiste à faire une déduction à partir de vérités certaines.

L'*argumentation* est une déduction qui porte sur des vérités seulement probables ou sur des faits que l'on doit vérifier.

2. *Tout ce qui est démontrable est vrai, mais tout ce qui est vrai n'est pas démontrable* : Il y a des vérités qui ne se prêtent pas à une démonstration mais seulement à une vérification. Il y a les vérités qui sont les principes des démonstrations et qui font l'objet d'une évidence intuitive.

3. Les démonstrations ne sont rigoureuses que si l'on remplace l'évidence intuitive des principes par une *structure*, c'est-à-dire par un système de règles qui définissent, hors de tout appel à l'évidence intuitive, des procédures démonstratives et qui délimitent le domaine des vérités que ces procédures permettent de démontrer.